Subiectul II — integral

Matematica — M1_Mate-Info

Subiectul întreg, din toate modelele de examen ale categoriei de mai sus.

205 exerciții · din 205 sesiuni (2012–2026)

1. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ mx+m^2y+z=0 \\ m^2x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați valorile lui m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

5p **b)** Arătați că, pentru nicio valoare a lui m, sistemul nu are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 numere reale strict pozitive.

5p **c)** Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

2. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Model Oficial

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$.

5p **a)** Verificați dacă legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Rezolvați ecuația $x * x * x = 3$.

3. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

---

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(\pi)\right)$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(A(x)\right)^{2012}=I_3$.

4. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Speciala Subiect V07 · V07

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

5. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} -x+ay+(2a+4)z=1 \\ (a+2)x+ay+(a+1)z=1 \\ (a+1)x+(2a-1)y+3z=2 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.
5p	**a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3+9a^2-3a-9$.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
5p	**c)** Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul.

6. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Toamna August · V09

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3},\ f \in \mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Arătați că $a^5 = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_5$.

5p **b)** Arătați că polinomul f este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

5p **c)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

7. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 > 0$ și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.

8. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2012 · Vara Iunie · V05

2012_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V05.pdf

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \,\middle|\, p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p), X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

9. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

10. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Model Oficial

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + X - m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X - 1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m = 2$ determinați patru numere întregi a, b, c, d, cu $a > 0$, astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

11. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

	1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați $\det(A(0))$.
5p	**b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.
5p	**c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

12. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Speciala Subiect V03 · V03

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 3X - 1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(2) - f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X + 2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X - 2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

13. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

	1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 0 & 0\\ m & 0 & m\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(1))$.
5p	**b)** Determinaţi numerele reale m știind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(101))=-51^2\cdot 101^3$.
	2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozit

14. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Toamna August · V09

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

5p **a)** Calculaţi $3 \circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x \circ y = (x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

15. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $D(2,3)=2$.

5p **b)** Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n\left(n,n^2\right)$, unde n este un număr natural nenul. Determinaţi numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

16. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2013 · Vara Iunie · V02

2013_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 4$, arătaţi că $f(4) = 8$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1 + x_2 = x_3$.

5p **c)** Dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)$, arătaţi că f se divide cu $X - 3$.

17. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

---

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

18. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Model Oficial

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, unde m este un număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(-1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

19. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea

20. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Simulare Nationala

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

elementelor egala cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$. Legea „$*$” este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătați că $x * y = 3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $\frac{1}{1007} * \frac{2}{1007} * \frac{3}{1007} * \ldots * \frac{2014}{1007}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$”.

21. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

	1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde n este număr natural.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Determinaţi numărul natural n ştiind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.
5p	**c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

22. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Speciala Subiect V09 · V09

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 - 3X + 2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 - 4$.

5p **c)** Arătați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

23. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2-2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(0))=1$.
5p	**b)** Arătaţi că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

24. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Toamna August · V07

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(2)=2(a-3)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.

5p **c)** Pentru $a=3$, rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f\left(2^x\right)=0$.

25. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Determinați matricea $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

26. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2014 · Vara Iunie · V01

2014_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(1)$.

5p **b)** Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.

5p **c)** Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

27. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a+1\\ 2 & a+2 & a+3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(a)\right)$.

5p **b)** Determinați numărul natural n, știind că $2A\left(n^2\right)-A(n)=A(6)$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

28. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Model Oficial

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătaţi că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, ştiind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.

5p **c)** Arătaţi că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

29. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(x)+I_3\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru

30. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Simulare Nationala

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă şi cu element neutru $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

5p **a)** Arătați că $x * y = (x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x și y.

5p **b)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculaţi $d_1 * d_2 * \cdots * d_8$, unde $d_1, d_2, \ldots, d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

31. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}0 & x & 0\\ x & 0 & x\\ 0 & x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=3B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B\left(x^2+x-2\right)$.

32. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Speciala Subiect V09 · V09

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = -1$, demonstrați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

33. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(x)A(y)=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x)=A(7)$.

34. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Toamna August · V01

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V01.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

35. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

36. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2015 · Vara Iunie · V08

2015_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3 = 3$.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n pentru care $n \circ n = 11$.

5p **c)** Calculaţi $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

37. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(10)\right)=1024$.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)$.

5p **c)** Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2017.

38. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Model Oficial

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=a$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.

39. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X \cdot A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

40. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Simulare Nationala

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$.

5p **c)** Determinați numerele naturale a, b și c, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.

41. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} -mx+y+z=-1 \\ x-my+z=-1 \\ x+y-mz=m \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

5p **c)** Pentru $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=9$.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativă

42. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Speciala Subiect V01 · V01

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $m*n=27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

43. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+z=1\\ ax+y-z=-1\\ x+y-2z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq 1$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

44. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Toamna August · V02

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x) f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a} = 3^{2015} - 1$.

45. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a\neq -1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

46. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2016 · Vara Iunie · V08

2016_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V08.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

47. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(2))$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinaţi numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=B(3)$.

48. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Model Oficial

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

49. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay+3z=2\\ x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

50. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Simulare Nationala

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

51. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))=\left(2^x-1\right)\left(2^x+x-x\cdot 2^x\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2\left(2^{2017}-1\right) & \frac{4}{3}\left(4^{2017}-1\right)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

52. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Speciala Subiect V04 · V04

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

53. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))\cdot\det(A(x+1))=12$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(0)$.

54. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Toamna August · V10

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V10.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+2)X^2+\left(m^2+2\right)X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

55. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+az=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(9))=0$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

56. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2017 · Vara Iunie · V02

2017_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $x \circ x = x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a \circ (-6) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de**

57. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=12$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

58. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Model Oficial

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

5p **b)** Arătați că, dacă n este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

59. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.

60. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Simulare Nationala

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

61. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=2 \\ (a+1)x-y+z=0 \\ x+y-az=1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

62. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Speciala Subiect V03 · V03

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\leq\frac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

63. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A\left(m^2+m+17\right)$.

64. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Toamna August · V09

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V09.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

65. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2mx+y+z=-1 \\ x+2my+z=0 \\ x+y+2mz=1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluție a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.

66. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2018 · Vara Iunie · V02

2018_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

67. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & m & -1 \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y+4z=5 \\ -x+my-z=-2 \\ mx+y+3z=4 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativă, cu element neutru,

68. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Model Oficial

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural.

69. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 2 & a & 4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+2y+az=2\\ 2x+ay+4z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

70. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Simulare Nationala

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a \circ b = 1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, numărul $\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

71. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, $a>0$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b, $a>0$, $b>0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $A(a)A(a)A(a)=A(7)$.

72. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Speciala Subiect V08 · V08

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V08.pdf

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3+mX^2-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(-2)=0$.

5p **b)** Pentru $m=1$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Se consideră $a=\frac{x_1^2+mx_1}{x_2x_3}+\frac{x_2^2+mx_2}{x_1x_3}+\frac{x_3^2+mx_3}{x_1x_2}$. Demonstrați că $a\in[3,+\infty)$, pentru orice număr real m.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

73. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.

74. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Toamna August · V07

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

75. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.

76. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2019 · Vara Iunie · V06

2019_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Demonstrați că $3\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3\right)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

77. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4 \\ ax+4y+z=6 \\ x-y+az=1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

78. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Model Oficial

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

79. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.

80. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Speciala Subiect V01 · V01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2\left(2^x + 2^y\right)$.

5p **a)** Arătați că $0 * 0 = 1$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $(x * x) * x = 3 + \log_2 3$.

81. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2-a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(5)$.

82. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.

83. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&2-a\\0&2&0\\2-a&0&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=8$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.

84. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1&-x\\1&0&1\\-x&1&x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(y)-A(2xy))=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=nI_3$.

85. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+2y+z=3 \\ 2x+(a+1)y+az=3 \\ ax+6y+4z=a+3 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a)=A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

86. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+ay+2z=4 \\ 3x+ay+2z=1 \\ 2x+ay+5z=b \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care sistemul de ecuații este compatibil nedeterminat.

87. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A(a)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ și $\left(A(a)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\3&a&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A(q)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-\left(A(a)\right)^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B(p)B(p)B(p)+5B(p)=O_3$.

88. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a-3 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+ay+z=1 \\ (a-3)x+ay+z=2a-1, \\ 3x+(2a-1)y+z=1 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativă si cu element neutru

89. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=7$.

5p **b)** Demonstrați că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

90. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -2 \\ a-1 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (2a+1)x+y-2z=a \\ (a-1)x-y+z=a+1, \\ 2ax-2y+z=1 \end{cases}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care există y_0 și z_0, numere reale, astfel încât $(2, y_0, z_0)$ să fie soluție a sistemului de ecuații.

91. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=i$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculați $\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

92. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=-15$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.

5p **c)** Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.

93. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1,1)$, $B\left(m,m^2\right)$ și $C\left(m+1,(m+1)^2\right)$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că triunghiul ABC are aria egală cu 1.

94. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq 1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

95. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a))=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Se consideră matricea $B(a)=A(a)-I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a, $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=O_3$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2)\cdot X=A(1)+A(2)+\ldots+A(n)$ este egală cu 21.

96. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B.

5p **c)** Dați exemplu de trei matrice $U, V, T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U+V+T=B$.

97. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x+my+z=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-9$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care sistemul de ecuații admite soluții diferite de $(0,0,0)$.

5p **c)** Pentru $m=9$, se consideră (x_0,y_0,z_0) o soluție a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale astfel încât $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$. Calculați $\dfrac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

98. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați rangul matricei $B=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)-I_3$.

99. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ 2x+(m+1)y+z=2 \\ x+y+(m+1)z=m+1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații **nu** are soluții.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, sistemul de ecuații are cel mult o soluție.

100. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+mz=4 \\ 4x+y+mz=6 \\ x-my-z=-1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.

101. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=14$

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\left(2^n+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}\right)=2^{20}+\frac{3}{2}$.

102. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - \sqrt{3}(x + y) + 3 + \sqrt{3}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3} * 0 = \sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x * y = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(y - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \ldots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

103. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-\frac{3}{5}xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}$.

104. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}\right)^5$.

5p **a)** Arătaţi că $2^5*3^5=5^5$.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $2^5*x^5*\left(243x^5\right)=100000$.

5p **c)** Se consideră numerele $M=1^5*2^5*...*10^5$ și $N=5^5\cdot 11^5$. Demonstrați că $M-N=0$.

105. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Pe mulțimea $M=(-10,10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{100(x+y)}{xy+100}$.

5p **a)** Arătați că $3*0=3$.

5p **b)** Se consideră $f:M\to(0,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)f(y)$, pentru orice $x,\ y\in M$.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 11 ori } x}=0$.

106. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,\ y\in G$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:M\to G$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

107. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$.

5p **b)** Verificați dacă $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:G\to M$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$, unde $M=(0,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

108. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x * x * x = \frac{26}{9}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „$*$” sunt numere naturale.

109. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y\circ z=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{1}{2}\circ\dfrac{1}{3}\circ\dfrac{1}{4}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{54}$.

110. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$.

5p **a)** Arătați că $2*64=4$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați $x\in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție „$*$”.

111. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12$.

5p **a)** Arătați că $x * 1 = 3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $0 * x = -9$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x * y = 3$, atunci $(x-1)(y-1) = 0$.

112. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2020}$.

5p **a)** Arătați că $x*(-x)=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{2021}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$.

113. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test13

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test13.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=2^{\ln x\cdot\ln y}$.

5p **a)** Arătați că $x*1=1$, pentru orice $x\in G$.

5p **b)** Determinați $f\in G$, știind că f este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$ pentru care $x*\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$.

114. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test14

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test14.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(2-i)=6+i$.

5p **b)** Demonstrați că numărul $z\circ\overline{z}$ este număr real, pentru orice număr complex z.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-2$.

115. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test15

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test15.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.

5p **a)** Arătați că $1 * 2 = 13$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x * x) * x^2 = 61$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.

116. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test16

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test16.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a pentru care $(-1) * 1 = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a \in [12, +\infty)$, atunci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

117. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = xy + 5x + 5y + 20$.

5p **a)** Arătați că $2 * (-1) = 23$.

5p **b)** Demonstrați că $e = -4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Pentru $r \in \{0,1,2\}$, notăm cu $A(r)$ mulțimea numerelor naturale care au restul r la împărțirea cu

118. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test18

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test18.pdf

2. Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-2x^2-2y^2+6$.

5p **a)** Arătați că $1*1=3$.

5p **b)** Arătați că $x*y\neq 2$, pentru orice numere raționale x și y.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=3$.

119. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test19

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test19.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\overline{z}_1 - \frac{1}{2}\overline{z}_2$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **a)** Arătați că $(1+i)\circ(1-i)=1$.

5p **b)** Se consideră $H=\{2+bi \mid b\in\mathbb{R}\}$. Arătați că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră numărul complex z_0. Arătați că există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0 \circ z$ este real.

120. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test20

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test20.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $2*(-2)=0$.

5p **b)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$. Arătați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

121. Matematica — Subiectul II, exercițiul 3

Sursă: 2020 · Teste Antrenament Oficiale · Test17

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test17.pdf

3 . Determinați numerele $r \in \{0,1,2\}$ pentru care $A(r)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

122. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

123. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Toamna August · V03

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-4(x+y)+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=10$, arătați că $1*2=0$.

5p **b)** Pentru $a=20$, arătați că $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in[20,+\infty)$, atunci mulțimea $H=[4,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”.

124. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

125. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2020 · Vara Iunie · V06

2020_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V06.pdf

2. Pe mulțimea $A=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.

5p **a)** Arătați că $1*2020=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Determinați $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

126. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0,1,2)\right)=2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(a,b,c)\right)=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

127. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Model Oficial

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+\hat{2}X+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, arătați că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$.

5p **b)** Determinați perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.

128. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+(a+1)y+(a+2)z=a \\ bx+(b+1)y+(b+2)z=b \\ y+z=1 \end{cases}$ și matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(0,1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2-z_0^2-2ax_0=3$, pentru orice număr real a.

129. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Simulare Nationala

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulţimea $M=(2,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=(x-1)^{\log_3(y-1)}+1$.

5p **a)** Arătați că $5*10=17$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x*x=x*x$.

130. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Speciala Subiect V07 · V07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

131. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Speciala Subiect V07 · V07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

132. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-a & 2a & 0 \\ -a & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$.

133. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1)=A(1)A(a)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.

134. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A+I_3\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A\cdot A=O_3$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale a, b și c, astfel încât $X=aI_3+bA+cA\cdot A$.

135. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=6$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B+B=B\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, știind că $(x+1)A\cdot B+(y-2)B\cdot A=B\cdot B\cdot B$.

136. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(m)+A(-m)\right)=8$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care are loc egalitatea $A(m)\cdot A(m)=A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că $A(1)-A(2)+A(3)-A(4)+\ldots+A(2n-1)-A(2n)=n\left(A(-1)-A(0)\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

137. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & m & 1 \\ m-1 & m & -m \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

138. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(a+1)y+az=6a+3\\ x+y+(a+1)z=4a+7\\ 2x+ay+z=2a+6\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=2(a^2+1)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(0)=A(0)\cdot A(a)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă (x_0,y_0,z_0) este soluția sistemului de ecuații, atunci x_0, y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

139. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x+y+az=-5 \\ x-y-az=10 \\ (2-a)x+y+z=1-a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și x_0 este număr întreg.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru

140. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(3)\right)=10$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, rangul matricei $A(n)$ este egal cu 3.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural m, $m\geq 2$, inversa matricei $A(m)$ **nu** are toate elementele numere întregi.

141. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2a-1)x+2y+z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=3$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului de ecuații pentru care $z_0^2=x_0+y_0$.

142. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (1+a)x+y+z=0 \\ x+(1+b)y+z=0 \\ x+y+(1+c)z=0 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale nenule.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-2,0,2))=-4$.

5p **b)** Arătați că, dacă $abc+ab+ac+bc\neq 0$, atunci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații admite și soluții diferite de soluția $(0,0,0)$, atunci numărul $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ este întreg.

143. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

1. Se consideră matricea $A(m,x)=\begin{pmatrix} 2 & -x & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 3 & -2 & x \end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(4,2)\right)=0$.

5p **b)** Determinați rangul matricei $A(2,1)$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n,p) pentru care $\det\left(A(3,n)\right)=\det\left(A(3,p)\right)$.

144. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test01

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test01.pdf

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $3*4=5$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*\sqrt{5}<x+1$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

145. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test02.pdf

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

5p **a)** Arătați că $\hat{3} \circ \hat{3} = \hat{3}$.

5p **b)** Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$, $f(x) = \hat{4} \circ x$ este bijectivă.

146. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test03

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = |x - y|$.

5p **a)** Arătați că $(5 * 2) * 1 = 2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Demonstrați că $(a * b) + (b * c) \geq a * c$, pentru orice numere reale a, b și c.

147. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x * y = x^y$.

5p **a)** Arătați că $2 * 4 = 4 * 2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” **nu** este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2 * 2) * n < 64$.

148. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test05

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test05.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+4xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x*\left(-x\right)\right)*\left(\left(-x\right)*x\right)=24x$.

5p **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}\geq 6$, pentru orice număr real nenul x.

149. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test06

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$.

5p **a)** Arătați că $(2+i)\circ(2-i)=9$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, numărul $A=\left(-1+(a+1)i\right)\circ\left(-1+(a-1)i\right)$ este real strict mai mic decât 0.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-5$.

150. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test07

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test07.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$.

5p **a)** Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Arătați că $x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

151. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test08

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test08.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$.

5p **a)** Arătați că $1 * 5 = 5$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x \geq 0$, pentru care $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a, $a \neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „$*$” este strict mai mic decât 0.

152. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test09

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test09.pdf

numere întregi.

2. Pe mulțimea $M=(2,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy-4}{x+y-4}$.

5p **a)** Arătați că $8\circ 8=5$.

5p **b)** Arătați că $(x+2)\circ(y+2)>(x+y)\circ 4$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x\in M$ și n este număr natural, $n\geq 2$, astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x}=2^n-\dfrac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

153. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test10

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test10.pdf

2. Pe mulțimea $G=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^{\log_3 y}}$.

5p **a)** Arătați că $4*3=2$.

5p **b)** Arătați că $e=9$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in G$, știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „$*$”.

154. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test11

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test11.pdf

2. Pe mulțimea $G=(0,2)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\dfrac{xy}{xy-x-y+2}$ și se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,2)$, $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $f\left(\frac{1}{2}\right)*f\left(\frac{2}{3}\right)*f\left(\frac{3}{4}\right)*\ldots*f\left(\frac{2020}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

155. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Teste Antrenament Oficiale · Test12

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Teste_Antrenament_Oficiale_Subiect_Test12.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\frac{xy}{3}-x-y+6$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*3=3$.

5p **b)** Arătați că $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 3$ pentru care $(x*(x+x'-3))+(x'*(2x-3))=42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”.

156. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1+\log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, $\det\left(A(a)+(A(a))^{-1}\right)\geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.

157. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Toamna August · V04

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x+y) + m(m+1)$, unde $m \in (0,+\infty)$.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $\left(mx^3\right) \circ \left(-mx^2\right) = m$, pentru orice $m \in (0,+\infty)$.

158. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+2&0&-a\\0&2&0\\3a&0&2-3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați matricea $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $aB=A(a)-2I_3$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)\cdot A(-n))>0$.

159. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2021 · Vara Iunie · V02

2021_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V02.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{2}\left(x+y+\left|x-y\right|\right)$.

5p **a)** Arătați că $2*0=2$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a\leq b$, atunci $a*b=b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(2x)*\left(x^2+1\right)*(-2x)=10$.

160. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&i&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$ și $A(z)=aI_3+bB$, unde $z=a+ib$, cu a și b numere reale și $i^2=-1$.

5p **a)** Arătați că $\det B=i$.

5p **b)** Demonstrați că $A(z_1)\cdot A(z_2)=A(z_1z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i)\cdot A(2+i)\cdot A(3+i)\cdot A(1-i)\cdot A(2-i)\cdot A(3-i)=nI_3$.

161. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Model Oficial

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\log_2\left(2^{x+y}-2^{x+1}-2^{y+1}+6\right)$.

5p **a)** Arătați că $x*y=\log_2\left(\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)+2\right)$, pentru orice $x,y\in M$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Arătați că $x*x*x<3x$, pentru orice $x\in M$.

162. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 3 & a\\ 2 & 1 & -1\\ a & 3 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+3y+az=2\\ 2x+y-z=-1\\ ax+3y+z=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=0$.

5p **b)** Arătați că $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=a^3B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a)=A(a)-A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0\leq 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

163. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Simulare Nationala

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{4 \cdot |z_1 z_2| + 1}$.

5p **a)** Arătați că $(-1) * 2 = \dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $|z * z| = |z|$.

164. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-x&0\\x&1-x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $(A(x)-I_3)(A(x)-I_3)=O_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=xA(x)-(x-1)I_3$.

165. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Speciala Subiect V03 · V03

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)^2-2(x-y)-3$.

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(x+1)=8$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=2mn$.

166. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

167. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Toamna August · V07

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy(x+y)}{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $\dfrac{1}{m}*\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{16}\cdot(m*n)$.

168. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 \\ 0 & 1 & -2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A\left(2n^2\right)$.

169. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2022 · Vara Iunie · V01

2022_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{2x}{y+2}+\frac{2y}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $1*0=1$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați $x\in M$, x nenul, pentru care $x*\frac{4}{x}=x$.

170. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale b și c pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real a.

171. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Model Oficial

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu $15X$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, polinomul f **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

172. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+2z=-2 \\ x+ay-z=4 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi și $x_0>y_0>z_0$.

173. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Simulare Nationala

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy}{1+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}$.

5p **a)** Arătați că $1*\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $x*(-x)\geq -x^2$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere din mulțimea M pentru care $a*b=1$.

174. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & -1 & 2a \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-y+2az=0 \\ x-2y+az=0 \\ x+y+(1-a)z=0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=-1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

175. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Speciala Subiect V06 · V06

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V06.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y^2-4(x+y)^2+1$.

5p **a)** Arătați că $0*1=-3$.

5p **b)** Arătați că $x*(-1)\leq 2x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\leq n$, pentru care $m*n=1$.

176. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x & x \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -x & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)-A(xy)=(x+y-2)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(-1)\cdot A(3)\cdot A(x)=A(y)$.

177. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Toamna August · V07

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^4+2X^3-8X^2+3mX+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=3$.

5p **b)** Pentru $m=0$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul rațional m pentru care polinomul f are rădăcina $x_1=1+\sqrt{3}$.

178. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+y+2z=2 \\ x-y+az=4 \\ ax+(a+1)y-2z=a \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că $x_0z_0+y_0=-2$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații.

179. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2023 · Vara Iunie · V01

2023_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V01.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + \left(2^x - 2\right)\left(2^y - 2\right)$.

5p **a)** Arătați că $2 \circ 3 = 18$.

5p **b)** Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $x \circ (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x.

180. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&-1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(0)=I_3$.

181. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Model Oficial

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[3,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=m(x-3)(y-3)+3$, unde $m\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Pentru $m=2$, arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:M\to M$, $f(x)=3+\sqrt{x-3}$. Pentru $m=1$, arătați că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x,y\in M$.

182. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră matricea $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, unde $(A(0))^{-1}$ este inversa matricei $A(0)$.

183. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Simulare Nationala

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Simulare_Nationala_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=5$.

184. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=2A(x)$.

5p **c)** Arătați că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci și matricea $A(-x)$ este inversabilă.

185. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Speciala Subiect V09 · V09

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V09.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + \frac{2x+2y-1}{4}$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 1 = \frac{7}{4}$.

5p **b)** Arătați că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2}-x\right) \circ \left(\frac{1}{2}+x\right) \circ \left(\frac{1}{2}+x^2\right) = \frac{1}{2}-x^2$.

186. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&x\\0&x&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=0$.

5p **b)** Arătați că $B(x)\cdot B(y)-B(x+y)=xyA$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x+1)-B(2x)\cdot B(1)=xA$.

187. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Toamna August · V03

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+X+2-a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=2$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\left(x_1-x_1^2\right)\left(x_2-x_2^2\right)\left(x_3-x_3^2\right)=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

188. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

	1. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(M(1))=7$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(2)=M(x-1)$.
5p	**c)** Determinați numerele naturale n pentru care $2\det(M(n))\leq\det(M(2n))$.

189. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2024 · Vara Iunie · V10

2024_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V10.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-aX+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=1$, arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X+1$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=8$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

190. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&x\\-x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A-B(x)\cdot A=xI_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A\cdot C(x)=B(x)$. Arătați că $C(x)-C(y)=(y-x)A$, pentru orice numere reale x și y.

191. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Model Oficial

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y + xy^2 + x + y$.

5p **a)** Arătați că $1 * 3 = 16$.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{2}{x} = 9x$.

5p **c)** Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

192. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}2x&3x&-3\\-x&-2x&1\\0&0&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=0$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(y)-xyI_3=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=2M(0)$.

193. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Speciala Subiect V03 · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*3=1$.

5p **b)** Arătați că $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{25}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziție „$*$”.

194. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}2x&3x&-3\\-x&-2x&1\\0&0&x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=0$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(y)-xyI_3=(x+y+1)M(0)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(1)\cdot M(x)-M(2)\cdot M\left(\frac{x}{2}\right)=2M(0)$.

195. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2025 · Toamna August · V03

2025_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $1*3=1$.

5p **b)** Arătați că $e=\frac{6}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $\frac{m}{25}$ este simetricul elementului n în raport cu legea de compoziție „$*$”.

196. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1-a \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax-2z=4 \\ x+y+(1-a)z=3 \\ 2x+y-2z=5 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=2$, arătați că $x_0z_0+y_0\geq 0$, pentru orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

197. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Model Oficial

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Model_Oficial_Subiect.pdf

2. Pe mulțimea $M=(1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{xy-1}{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Arătați că $3*5=\dfrac{7}{4}$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x*x=3$.

5p **c)** Demonstrați că $(x*2)*x>2$, pentru orice $x\in M$.

198. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Rezerva Vara Iunie · V07

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Rezerva_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V07.pdf

---

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1&2&1\\0&-1&-a\\0&2&2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(3))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(a)=(2a-1)A(a)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Se consideră matricea $B(n)=A(n)+nI_3$, unde n este număr natural. Determinați numărul natural n pentru care $A(n)\cdot B(n)=2n^2A(n)$.

199. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Rezerva Vara Iunie · V07

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Rezerva_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V07.pdf

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX-6$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Pentru $a=4$ și $b=0$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=b=1$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X^2-X+1$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care două dintre rădăcinile polinomului f sunt numere opuse.

200. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

---

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1-2a & a & 0 \\ 2a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=4$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-3ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $A(1)\cdot A(a)+A(5)=2A(4)$.

201. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Speciala Subiect V02 · V02

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Speciala_Subiect_V02.pdf

2. Se consideră polinomul $f=mX^4-mX^2+X+1$, unde m este număr real nenul.

5p **a)** Arătați că $f(-1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

5p **b)** Determinați numărul real nenul m pentru care restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X+2$ este egal cu 11.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=1$, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

202. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -2a\\ 2 & -1 & -a\\ 1 & -a & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+ay-2az=-1\\ 2x-y-az=a\\ x-ay=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.

5p **b)** Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $4x_0z_0=1$.

203. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Toamna August · V04

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Toamna_August-Septembrie_Subiect_V04.pdf

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 8$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = 8$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X + 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care raportul a două dintre rădăcinile polinomului f este egal cu 2.

204. Matematica — Subiectul II, exercițiul 1

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 3 & a\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+ay+az=1\\ ax+3y+az=0\\ 2y+z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că, pentru orice număr real a, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul a pentru care sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0), cu $z_0=nx_0$, unde n este număr natural.

205. Matematica — Subiectul II, exercițiul 2

Sursă: 2026 · Vara Iunie · V03

2026_Matematica_M1_Mate-Info_Sesiune_Vara_Iunie-Iulie_Subiect_V03.pdf

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{2}{3}(x-3)(y-3)+3.$

5p **a)** Arătați că $0*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*\frac{3x}{2}=5x$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*m*n=-1$.